LA CORRESPONDENCIA ENTRE LEIBNIZ Y EL MARQUÉS DE L'HOSPITAL: SOBRE LA ENVOLVENTE DE UNA FAMILIA DE CURVAS[1]

Mónica Blanco
monica.blanco@upc.edu

1.- Introducción.

En 1696 Guillaume François Antoine Marqués de L'Hospital, Marqués de Sainte-Mesme, Conde d'Entremont y Señor de Ouques-la-Chaise (1661-1704) publicó el primer manual sobre cálculo diferencial titulado *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. Esta obra se basaba fundamentalmente en las lecciones particulares que Johann Bernoulli (1667-1748) dio a L'Hospital entre 1691 y 1692 durante su estancia en Francia. Cuando Bernoulli dejó Francia, la instrucción continuó por carta hasta 1701. En el mismo período (1692-1701), L'Hospital también mantuvo correspondencia con Gottfried W. Leibniz (1646-1716). En su primera carta a Leibniz, con fecha de 14 de diciembre de 1692, el Marqués planteaba la siguiente cuestión: cómo hallar la curva que es tangente a todos los miembros de una familia de parábolas en un punto, es decir, cómo hallar la envolvente de una familia de parábolas. Unos días antes, L'Hospital había planteado el mismo problema en una carta a Johann Bernoulli. La versión final de la solución al problema planteado aparece en la sección VIII del *Analyse des infiniment petits*. El objetivo de esta contribución es analizar el desarrollo matemático de este problema específico, desde su gestación en la correspondencia de L'Hospital con Leibniz y Bernoulli hasta su publicación en el *Analyse*, así como mostrar algunas aplicaciones de dicho problema.

1 Este trabajo tiene su origen, en parte, en la comunicación que presenté en el congreso 300 Anniversary Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), celebrado en Barcelona los días 21 y 22 de enero de 2016 y organizado por el Grup de Recerca d'Història de la Ciència i de la Tècnica y el Departament de Matemàtiques de la Universitat Politècnica de Catalunya. Esta investigación está incluida en los proyectos HAR2013-44643-R y HAR2016-75871-R.

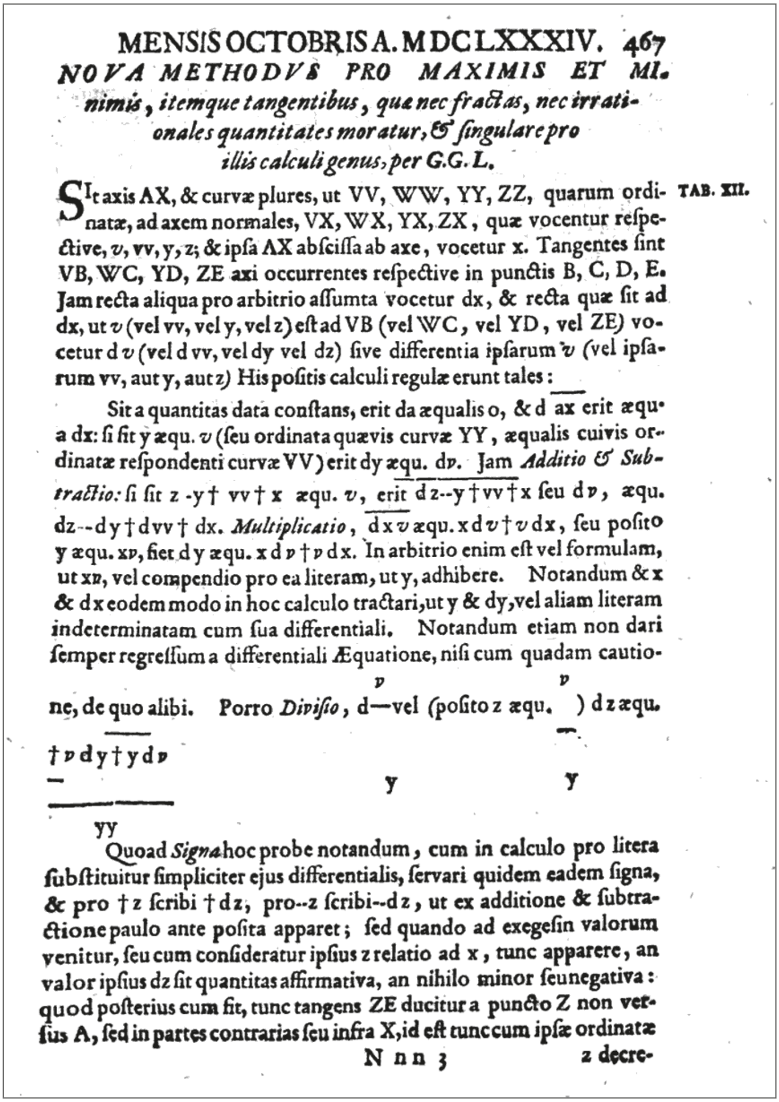
2.- El Marqués de L'Hospital y el cálculo leibniziano.

En 1684 Leibniz había publicado en la revista *Acta Eruditorum* el primer artículo sobre su cálculo: *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus* (*Un método nuevo para los máximos y los mínimos, así como para las tangentes, que no se detiene ante las cantidades fraccionarias o irracionales, y es un singular género de cálculo para estos problemas*) (Figura 1). En este artículo Leibniz presentaba, sin justificar, las reglas básicas del cálculo diferencial, y la aplicación del cálculo a algunos problemas, como el problema de la ley de la refracción[2] y el problema de De Beaune[3]. Dos años más tarde Leibniz publicaba otro artículo en la misma revista, esta vez centrado en el cálculo integral: *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* (*Sobre una geometría altamente oculta y el análisis de los indivisibles e infinitos*), donde aparece por primera vez el símbolo ∫ para representar la integral[4].

2 Este problema consiste en hallar un punto sobre una recta que separa dos medios de diferentes densidades, de manera que el camino de un medio a otro a través del punto sea el más fácil de todos los posibles, es decir, sea el de recorrido mínimo. De esta cuestión ya se habían ocupado los matemáticos árabes, como Al-Haytham (965-1039), y en los siglos XV y XVI Willebrord Snell (1581-1626), Christian Huygens (1629-1695), René Descartes (1596-1650) y Pierre de Fermat (1601-1665). Ver, por ejemplo, PLA ET AL (2008: 183-184).

3 Se trata del problema que Florimond de Beaune (1601-1652) planteó en una carta a Descartes en 1638: hallar una curva cuya subtangente sea una constante dada. Este problema es considerado como el primer ejemplo de método inverso de las tangentes. Ver FAUVEL; GRAY (1987: 351).

4 Existe traducción al castellano de ambos artículos realizada por Martín Santos, con un estudio preliminar de De Lorenzo (MARTÍN-SANTOS; DE LORENZO, 1987).


MENSIS OCTOBRIS A. MDCLXXXIV. 467

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MInimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & singulare pro illis calculi genus, per G.G.L.

Sit axis AX, & curvæ plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatæ, ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quæ vocentur respective, v, vv, y, z; & ipsa AX abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint VB, WC, YD, ZE axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx, & recta quæ sit ad dx, ut v (vel vv, vel y, vel z) est ad VB (vel WC, vel YD, vel ZE) vocetur dv (vel dvv, vel dy vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsarum vv, aut y, aut z) His positis calculi regulæ erunt tales: TAB. XII.

Sit a quantitas data constans, erit da æqualis 0, & $d\overline{ax}$ erit æqu. a dx: si sit y æqu. v (seu ordinata quævis curvæ YY, æqualis cuivis ordinatæ respondenti curvæ VV) erit dy æqu. dv. Jam *Additio & Subtractio:* si sit z - y + vv + x æqu. v, erit $d\overline{z - y + vv + x}$ seu dv, æqu. dz - dy + dvv + dx. *Multiplicatio*, $d\overline{xv}$ æqu. xd$v$ + $v$dx, seu posito y æqu. xv, fiet dy æqu. xd$v$ + $v$dx. In arbitrio enim est vel formulam, ut xv, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum & x & dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y & dy, vel aliam literam indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam non dari semper regressum a differentiali Æquatione, nisi cum quadam cautione, de quo alibi. Porro *Divisio*, $d\frac{v}{y}$ vel (posito z æqu. $\frac{v}{y}$) dz æqu. $\frac{\pm v\,dy \mp y\,dv}{yy}$

Quoad *Signa* hoc probe notandum, cum in calculo pro litera substituitur simpliciter ejus differentialis, servari quidem eadem signa, & pro + z scribi + dz, pro - z scribi - dz, ut ex additione & subtractione paulo ante posita apparet; sed quando ad exegesin valorum venitur, seu cum consideratur ipsius z relatio ad x, tunc apparere, an valor ipsius dz sit quantitas affirmativa, an nihilo minor seu negativa: quod posterius cum fit, tunc tangens ZE ducitur a puncto Z non versus A, sed in partes contrarias seu infra X, id est tunc cum ipsæ ordinatæ

Nnn 3 z decre-

Figura 1. Primera página de "Nova Methodus pro Maximis et minimis..." (LEIBNIZ, 1684).

En ambos casos se trataba de ensayos cortos y difíciles de seguir, sin explicaciones complementarias. La lectura y comprensión de estos dos artículos parece haber motivado el interés del Marqués de L'Hospital por difundir el cálculo e intentar demostrar las reglas de Leibniz. Interés que comparte con el filósofo, teólogo y padre oratoriano Nicolas Malebranche (1638-1715)[5]. Si bien es cierto que no fue nombrado miembro honorífico de la Académie des Sciences de París hasta 1699, la implicación de Malebranche en los asuntos de la academia ejerció una profunda influencia en el desarrollo y difusión del cálculo en Francia, a través de su círculo de amigos, contactos y correspondientes. A este círculo pertenecían el Marqués de L'Hospital, Pierre Varignon (1654-1722), Charles R. Reyneau (1656-1728), Louis Carré (1663-1711), y Pierre R. de Montmort (1678-1719), entre otros[6]. Aunque originalmente formado en el pensamiento Cartesiano, en los años 1670s Malebranche se convirtió en seguidor de las teorías filosóficas y matemáticas de Leibniz, a quien conoció personalmente durante su visita a París (1672-1676)[7]. Sin embargo, aunque reconocía a Leibniz como el inventor del nuevo cálculo, a Malebranche le resultaba muy difícil entender sus artículos:

> *"Je m'attendais encore à apprendre de vous mille belles choses, et surtout les addresses particulières dont il faut se servir dans le calcul integral et différentiel, et les manières de l'appliquer aux questions de physique, car dans l'intégral principalement, il y a pour moi bien des difficultés. Ne pourriez-vous point, Monsieur, donner au public plus en detail que vous n'avez fait les règles de ce calcul et les usages qu'on peut tirer?"* (Malebranche a Leibniz, 1692, Robinet, 1970: 58).

Es precisamente por esta razón que Malebranche promovió el estudio y difusión del cálculo leibniziano en su círculo. Así, se puede considerar que la publicación del *Analyse des infiniment petits* de L'Hospital está relacionada con el interés de Malebranche de desarrollar un vehículo pedagógico para difundir el cálculo leibniziano y, en particular, del cálculo diferencial[8]. De hecho, fue Malebranche quien en 1691 puso en contacto al Marqués de

5 Sobre la obra, pensamiento e influencia de Malebranche, ver NADLER (2000). ROBINET (1970) explora la obra científica de Malebranche y su relación con la Académie des sciences de París.

6 ROBINET (1960) presenta un excelente estudio sobre el círculo de Malebranche y la introducción del cálculo en Francia.

7 Véase el capítulo II de ROBINET (1970).

8 En ese sentido, hay que destacar que, en el inventario del grupo de Malebranche, todos los artículos de *Acta Eruditorum* relacionados con el nuevo cálculo están muy bien ordenados, lo cual pone de manifiesto la intención pedagógica de Malebranche, según ROBINET (1960: 292).

L'Hospital con Johann Bernoulli durante la estancia de éste en París[9]. A raíz de este encuentro, empiezan las lecciones de Bernoulli al Marqués, primero en París (entre finales de 1691 y julio de 1692) y seguidamente en la propiedad del Marqués en Oucques (entre agosto y octubre de 1692). Cuando Bernoulli abandona Francia las lecciones continúan por correspondencia, hasta 1701. Cuando en 1955 Otto Spiess editó la correspondencia entre Johann Bernoulli y el Marqués de L'Hospital, se hizo evidente que el *Analyse des infiniment petits* se basaba esencialmente en las lecciones y en las cartas de Bernoulli[10].

Durante el mismo período, 1692-1701, el Marqués de L'Hospital también mantuvo correspondencia con Leibniz (Gerhardt, 1849-1850, II), correspondencia entablada gracias a la recomendación de Malebranche[11]. En 1692, en su primera carta a Leibniz, L'Hospital expresaba su interés por todas las cosas que aún quedaban por descubrir en relación al "inverso de este cálculo" (diferencial), es decir, el cálculo integral:

> *"En effect l'usage de vostre calcul differentiel est merveilleux pour determiner tout d'un coup les tangentes, les plus grandes et les moindres quantités, les points d'inflexion, les evolvés de Mr. Hugens, les caustiques de Mr. de Tschirnhaus etc. et cela me paroist achevé: mais il me semble qu'il reste bien des choses a découvrir pour l'inverse de ce calcul".* (I: L'Hospital a Leibniz, 14 diciembre 1692, Gerhardt, 1849-1850, II)

Son diversas las cuestiones matemáticas tratadas en la correspondencia entre L'Hospital y Leibniz, por ejemplo, la rectificación del logaritmo[12], la resolución de ecuaciones diferenciales, la determinación de cuadraturas o la

9 En ROBINET (1970: 56) se describe este primer encuentro.

10 Por un lado, BERNOULLI (1742) recoge las lecciones correspondientes al cálculo integral. Por otro lado, en 1922 Paul Schafheitlin publicó las *Lectiones de calculo differentialium* de Bernoulli. Sin embargo, no se puede decir que los textos de L'Hospital y de Bernoulli sean idénticos, tal como se constata en BLANCO (2001), donde se analizan y comparan algunos de los problemas que aparecen en ambos autores. Sobre el papel que Johann Bernoulli jugó en la elaboración del *Analyse*, se puede consultar BRADLEY ET AL (2015: i-liv).

11 Si bien en este artículo se sigue la numeración de las cartas tal como aparece en GERHARDT (1849-1850), el Leibniz Archiv reeditó en 2003 la correspondencia matemática, científica y técnica de Leibniz y, en particular, su correspondencia con L'Hospital (LEIBNIZ, 2003). En relación a la correspondencia entre Leibniz y L'Hospital, véase por ejemplo DE LORENZO (2005: 65-73).

12 En BLANCO (2016) se estudia el problema de la rectificación de la curva logarítmica a partir de la correspondencia del Marqués de L'Hospital con Huygens y Leibniz.

envolvente de una familia de curvas. En diversas ocasiones, L'Hospital llegaba incluso a discutir un mismo problema con Leibniz y con Johann Bernoulli, como es el caso del problema de la envolvente de una familia de curvas que se presenta a continuación.

3.- Un problema "epistolar" a tres bandas.

Al final de su primera carta de 1692, L'Hospital pide a Leibniz que le explique cómo aplicar su cálculo para hallar la curva tangente a una infinidad de parábolas que verifican una serie de condiciones, es decir, la envolvente de una familia de parábolas (Figura 2):

> *"J'ai lù avec application ce que vous avez fait mettre dans les Actes de Leipsic du mois d'avril de cette année et je crois y entrevoir la methode que vous proposés, mais il me faudroit quelques exemples pour m'eclaircir, en voici un que j'ai imaginé.*
>
> *Soit la demie Ellipse ABD qui a pour demiaxe les lignes CA, CB et soit entendue une infinité de paraboles DEF, Def qui passent toutes par le mesme point D et dont tous les sommets des axes se rencontrent dans la demie Ellipse. Il faut décrire la ligne qui les touche toutes et determiner le point F ou deux quelconques de ces paraboles, qui ne sont eloignées entr'elles que d'une distance infiniment petite, se rencontrent. Je trouve dans les cas ou CB = AD que la ligne qui touche toutes les paraboles est aussi une parabole qui a pour sommet le point A et pour foyer le point D et que la ligne DF qui rencontre la parabole DEF au point touchant F passe par son foyer. Je vous serai fort obligé si vous me faitez part de la maniere d'appliquer vostre calcul pour resoudre ces sortes de problemas".* (I: L'Hospital a Leibniz, 14 diciembre 1692, Gerhardt, 1849-1850, II)

Unos días antes de redactar esta carta a Leibniz, L'Hospital había escrito a Johann Bernoulli, planteándole el mismo problema y pidiéndole que le enviara un método general para resolver este tipo de problemas (Nr 6: L'Hospital a Johann Bernoulli, 8 diciembre 1692, Spiess, 1955).

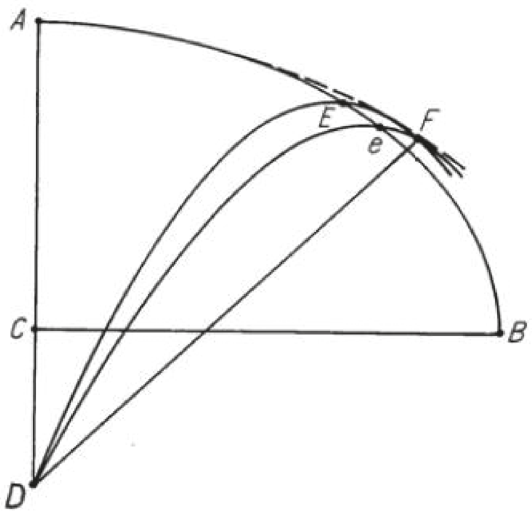


Figura 2. Envolvente de una familia de parábolas. Figura reproducida en LEIBNIZ (2003: 450).

En ambas cartas, L'Hospital afirmaba que el problema planteado estaba relacionado con un artículo de Leibniz, publicado en las "Actes de Leipzic" (es decir, en *Acta Eruditorum*), en abril de 1692. Se trata del artículo *De Linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis inter se concurrentibus formata easque omnes tangente, ac de novo in ea re analysis infinitorum usu* ("Construcción de una curva derivada de una infinidad de líneas que están bien ordenadas, concurrentes, y tangentes a ella; y una nueva aplicación del análisis de infinitos"), que se centraba en la búsqueda de un algoritmo para determinar la curva que en cada uno de sus puntos fuera tangente a una curva de una familia dada, es decir, la envolvente de una familia de curvas[13]. En realidad, aunque a nivel conceptual el problema de las envolventes no era nuevo, en este caso

13 Este artículo fue seguido en 1694 por otro también centrado en la construcción de la envolvente de una familia de curvas: *Nova calculi differentialis applicatio et usus ad multiplicem linearum constructionem ex data tangentium conditionem* ("Un nuevo modo de aplicación del cálculo diferencial a diversas construcciones posibles de una curva a partir de una propiedad de sus tangentes"). Para esta contribución se ha utilizado la versión en inglés de estos dos artículos de LEIBNIZ, de 1692 y 1694, que se encuentra en BEAUDRY (2000: 22-26 y 62-70, respectivamente). ENGELSMAN (1984) analiza con detalle el contenido de ambos textos.

la novedad residía en la aplicación del "nuevo" cálculo a la resolución de un problema "viejo", tal como señala Engelsman (1984)[14]. A principios de 1693 Leibniz responde a L'Hospital que próximamente le enviará su manera de aplicar el cálculo diferencial para hallar la línea que toca a una familia de líneas, pues en esos momentos "il m'y faudroit un peu penser, ou chercher dans mes brouillons" (II: Leibniz a L'Hospital, 1693, Gerhardt, 1849-1850, II).

Por otro lado, aunque las cartas de Johann Bernoulli donde expone la resolución de este problema aparentemente se han perdido, por las respuestas de L'Hospital se deduce que Bernoulli habría solucionado el problema entre el 18 de diciembre de 1692 y el 20 de enero de 1693: "La maniere dont vous trouuez l'intersection de deux paraboles infiniment proches me paroit forte ingenieuse. Vous vous estes trompé dans le calcul" (Nr 7: L'Hospital a Johann Bernoulli, 2 enero 1693, en respuesta a carta de Bernoulli de 18 diciembre 1692, perdida, SPIESS, 1955). Y más adelante: "Vous auez tres bien resolu tous les problemes que je vous proposois" (Nr 8: L'Hospital a Johann Bernoulli, 20 febrero 1693, en respuesta a carta de Bernoulli de 20 enero 1693, perdida, Spiess, 1955)[15].

Pocos días después, L'Hospital enviaba a Leibniz la resolución del problema, presentándola como suya, sin mencionar a Johann Bernoulli (III: L'Hospital a Leibniz, 20 febrero 1693, GERHARDT, 1849-1850, II). En dicha carta L'Hospital primero presentaba el caso general, que a continuación aplicaba al caso particular de una semi-elipse. Será precisamente así tal como aparecerá en la sección VIII del *Analyse* (L'Hospital, 1696: §§146-147), como se verá en la siguiente sección.

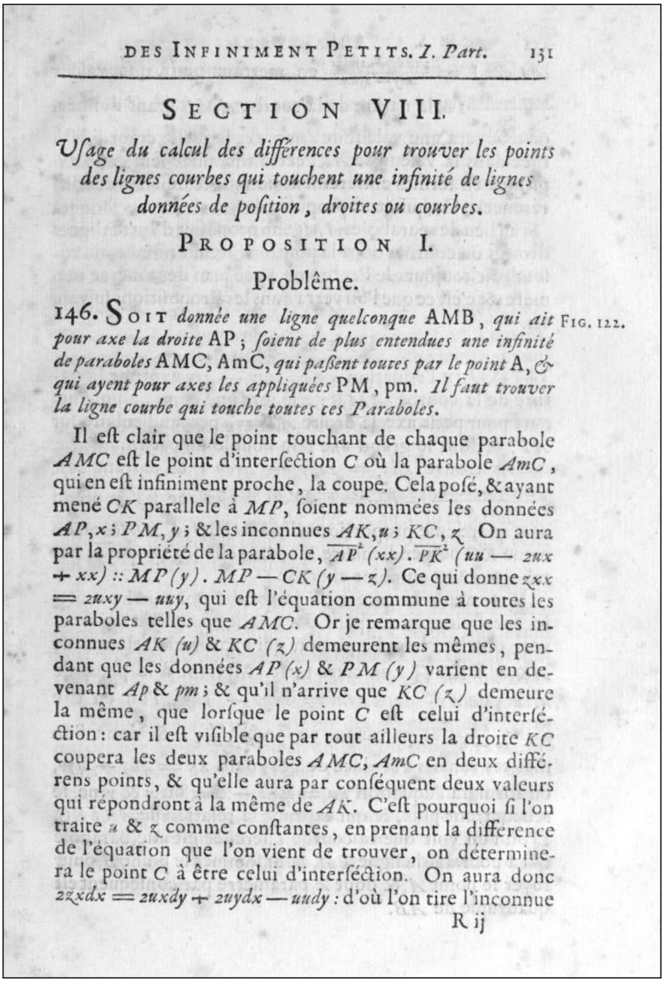
4.- Determinación de la envolvente de una familia de parábolas.

La Sección VIII del *Analyse des infiniment petits*, titulada *Usage du calcul des différences pour trouver les points des lignes courbes qui touchent une infinité de lignes données de position, droites ou courbes*, empieza con la determinación del

14 Este problema había sido tratado ya por Evangelista Torricelli (1608-1647) en su estudio sobre balística *De Motu Proiectorum* (libro segundo, 1644), y por Huygens en su *Traité de la lumière* (escrito en 1678, publicado en 1690).

15 En verdad, como se verá más adelante, Johann Bernoulli habría solucionado este problema ya en 1691, durante su estancia en Ginebra, mediante la geometría vulgar. Ver SPIESS (1955: 161-162, nota 4).

problema de la envolvente de una familia de parábolas (Figura 3).



DES INFINIMENT PETITS. *I. Part.* 131

SECTION VIII.

Usage du calcul des différences pour trouver les points des lignes courbes qui touchent une infinité de lignes données de position, droites ou courbes.

PROPOSITION I.

Problême.

146. SOIT *donnée une ligne quelconque* AMB, *qui ait pour axe la droite* AP; *soient de plus entendues une infinité de paraboles* AMC, AmC, *qui passent toutes par le point* A, *& qui ayent pour axes les appliquées* PM, pm. *Il faut trouver la ligne courbe qui touche toutes ces Paraboles.* FIG. 122.

Il est clair que le point touchant de chaque parabole *AMC* est le point d'interséction *C* où la parabole *AmC*, qui en est infiniment proche, la coupe. Cela posé, & ayant mené *CK* parallele à *MP*, soient nommées les données *AP*, *x*; *PM*, *y*; & les inconnues *AK*, *u*; *KC*, *z*. On aura par la proprieté de la parabole, $\overline{AP}^2\ (xx) . \overline{PK}^2\ (uu - 2ux + xx) :: MP\ (y) . MP - CK\ (y - z)$. Ce qui donne $zxx = 2uxy - uuy$, qui est l'équation commune à toutes les paraboles telles que *AMC*. Or je remarque que les inconnues *AK* (*u*) & *KC* (*z*) demeurent les mêmes, pendant que les données *AP* (*x*) & *PM* (*y*) varient en devenant *Ap* & *pm*; & qu'il n'arrive que *KC* (*z*) demeure la même, que lorsque le point *C* est celui d'interséction: car il est visible que par tout ailleurs la droite *KC* coupera les deux paraboles *AMC*, *AmC* en deux differens points, & qu'elle aura par conséquent deux valeurs qui répondront à la même de *AK*. C'est pourquoi si l'on traite *u* & *z* comme constantes, en prenant la difference de l'équation que l'on vient de trouver, on déterminera le point *C* à être celui d'interséction. On aura donc $2zxdx = 2uxdy + 2uydx - uudy$: d'où l'on tire l'inconnue

R ij

Figura 3. Primera página de la Sección VIII del *Analyse des infiniment petits* (L'HOSPITAL, 1696).

La sección empieza con el caso general (L'Hospital, 1696: §146), considerando una línea cualquiera *AMB* de eje *AP* y una infinidad de parábolas *AMC*, *AmC*, por el punto *A*, y cuyos ejes son las ordenadas *PM*, *pm*, como muestra la Figura 4 (correspondiente a la Figura 122 de L'Hospital). Para determinar la curva que toca a todas estas parábolas, L'Hospital afirma, sin explicación alguna, que está claro que el punto de intersección *C* entre dos parábolas infinitamente cercanas es el punto de tangencia de la curva buscada.

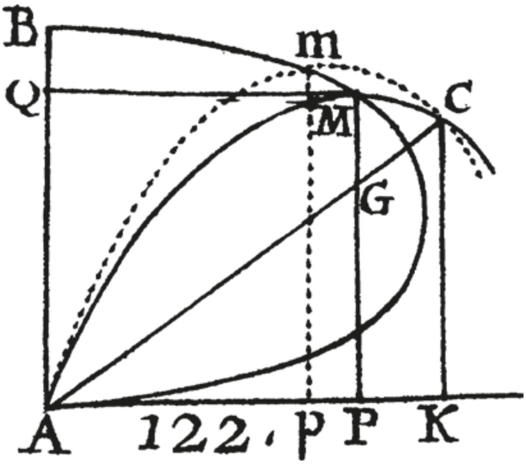


Figura 4. Reproducción de la Figura 122 del *Analyse des infiniments petits* de L'Hospital en BRADLEY ET AL (2015: 140).

Después de establecer C como el punto de intersección entre dos parábolas infinitamente cercanas, L'Hospital considera CK paralela a MP y define $x = AP$, $y = PM$ y las cantidades desconocidas $u = AK$, $z = KC$. Por la propiedad de la parábola se tiene que:

$$\overline{AP}^2\,(xx).\overline{PK}^2\,(uu - 2ux + xx) :: MP(y).\ MP - CK(y\text{-}z) \qquad (1)$$

De donde se obtiene la ecuación común a todas las parábolas, como AMC:

$$zxx = 2uxy - uuy \qquad (2)$$

Tomando como constantes u, z, se hacen variar x, y, es decir, AP y PM pasan a ser Ap y pm, respectivamente. KC (z) se mantiene constante si el punto C es el punto de intersección, pues fuera de la recta KC corta las dos parábolas AMC, AmC en dos puntos diferentes, dos valores que corresponden a AK. Al diferenciar dicha ecuación se obtiene la expresión:

$$2zxdx = 2uxdy + 2uydx - uudy \qquad (3)$$

Despejando z de la ecuación (2) común a todas las parábolas y substituyendo en la ecuación (3) de la diferencia se puede determinar la expresión de u:

$$u = \frac{2xxdy - 2yxdx}{xdy - 2ydx} \qquad (4)$$

Exceptuando un cambio de signo de numerador y denominador, así es como L'Hospital indicaba la expresión de u en su carta a Bernoulli (Nr 7: L'Hospital a Johann Bernoulli, 2 enero 1693, Spiess, 1955), después de haber corregido un error de cálculo en la expresión de z hallada por este último en su anterior carta[16]. Finalmente, dada la curva *AMB*, se puede hallar el valor de dy en dx, que se substituirá en la expresión (4), para obtener la expresión de u en términos conocidos y sin diferencias.

A continuación, L'Hospital ilustra esta proposición general con el caso particular en que *AMB* sea una semi-elipse (L'HOSPITAL, 1696: §147), que es precisamente el caso que L'Hospital planteaba en sus cartas a Leibniz y Bernoulli.

Se ha visto que el punto *C*, la intersección entre dos parábolas infinitamente cercanas, juega un papel crucial en la construcción de L'Hospital. Esta idea se puede encontrar, también sin justificar, en el artículo de Leibniz de 1692 al que L'Hospital hace referencia en sus cartas:

> *"Ahora, aunque estas líneas no concurran todas en un punto común, sin embargo, si tomáis dos de estas líneas muy cercanas la una de la otra (con una diferencia infinitesimal, es decir con una distancia infinitamente pequeña entre ellas), correrán de manera concurrente en posición ordenada, de tal manera que un punto de concurrencia puede ser asignado, y estos puntos de concurrencia, tomados en orden, muestran una curva de concurrencia, que es el lugar común de todas las concurrencias entre las líneas más cercanas, y es remarcable por el hecho de que toca a todas las ordenadas dirigidas, y está formada por sus concurrencias; y no hace falta demostrar esta propiedad pues es suficientemente clara para cualquiera que quiera concentrarse en esto."* (Leibniz, 1692, p. 22 de la traducción de Beaudry, 2000)

Un poco más arriba en ese mismo artículo, Leibniz ha definido curvas trazadas "en posición ordenada" como aquéllas que siguen una cierta ley o

16 SPIESS, 1955: 161-162, nota 4.

correspondencia, según la cual a cada punto de una cierta curva (la "ordinatrix") se le asigna una curva de la familia. De manera que los puntos de la "ordinatrix" determinan la progresión de las curvas en la familia. Por ejemplo, en el caso presentado por L'Hospital, la curva *AMB* jugaría el papel de "ordinatrix"[17].

Sin embargo, que el punto de intersección *C* entre dos parábolas infinitamente cercanas fuera el punto de tangencia de la curva buscada no resultaba tan evidente para Varignon, que creyó conveniente justificar esta propiedad en sus Éclaircissemens sur l'Analyse des infiniment petits. Este texto, publicado en 1725, contenía no sólo explicaciones sobre lo que Varignon consideraba cuestiones poco claras del *Analyse* de L'Hospital, sino también nuevas proposiciones y reglas, problemas complementarios, y métodos diferentes, que el propio Varignon había trabajado[18]. Para justificar que el punto de tangencia de cada parábola *AMC* con la curva buscada (o sea, la envolvente) es el punto de intersección de dicha parábola con su vecina infinitamente cercana, Varignon considera la curva tangente como un polígono de infinidad de lados tomados sobre las parábolas que toca y que le son comunes con esas parábolas en el lugar donde las toca. Así, Varignon argumenta que el punto de intersección de dos lados sobre los cuales dos parábolas infinitamente próximas son tangentes a dicha curva, coincide con el punto de intersección de dichas parábolas:

> *"Il faut considerer cette courbe touchante comme un polygone d'une infinité de côtés pris sur les paraboles qu'il touche & qui lui sont communs avec ces paraboles à l'endroit où il les touche. Ainsi le point d'intersection où concourent deux côtés dans lesquels deux paraboles infiniment voisines sont touchées par cette courbe, sera un des angles du polygone qui la forme; & par conséquent il sera dans cette courbe".* (Varignon, 1725: 72)

Tras alabar la solución propuesta por L'Hospital, Leibniz ofrece otro

17 Para una discusión detallada sobre el concepto de "ordinatrix" en Leibniz, véase ENGELSMAN (1984: 23-25).

18 La intención de Varignon era publicar sus comentarios como anexo del libro de L'Hospital, proyecto que nunca llegó a llevar a cabo. Tras su muerte, estos comentarios fueron comprados por el editor Jacques Rollin (1702?-1768) quien los publicó en 1725 bajo el título de Éclaircissemens sur l'Analyse des infiniment petits. Sobre el papel jugado por Rollin en la publicación de los Éclaircissemens de Varignon se puede consultar BLANCO (2008).

ejemplo, en el que las parábolas tienen eje vertical, con el vértice sobre una determinada recta (IV: Leibniz a L'Hospital, mediados marzo 1693, Gerhardt, 1849-1850, II). Dicho ejemplo le sirve para discutir la naturaleza de los parámetros de la ecuación de una curva:

> *"Il peut arriver que de plusieurs parametres (ou constantes dans l'equation d'une même courbe), l'un soit differentiable, et l'autre demeure invariable: par exemple si une même parabole estoit differemment placée, en sorte que son axe soit tousjours vertical, ou parallele à AL, et le sommet tousjours dans une droite donnée AM, les intersections des situations, ou traces de la parabole, donneront une nouvelle ligne qui touchera toutes ces traces".* (IV: Leibniz a L'Hospital, mediados marzo 1693, Gerhardt, 1849-1850, II)

Aunque según Leibniz resulta evidente que en este caso se trata de una recta, pasa a justificar esta afirmación de la siguiente manera. Sea $AB = z$, $BC = v$, $AL = x$, $LM = y$, y f el parámetro constante de la parábola (Figura 5).

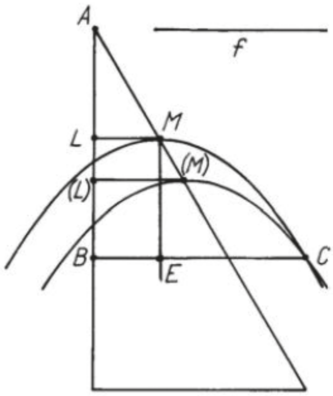


Figura 5. Figura reproducida en LEIBNIZ (2003: 509).

Por tratarse de una parábola se tiene:

$$f.\ ME = EC^2 \qquad (5)$$

y como $ME = z\text{-}x$ y $EC = v\text{-}y$, entonces para cada punto se verifica:

$$f\,z - f\,x = vv - 2vy + yy \qquad (6)$$

En dicha ecuación, el parámetro f es, según Leibniz, "constantissima", muy constante, por partida doble: para cada punto de una línea curva *MC*, y para todas las curvas *MC* de la familia (al tratarse de la misma parábola, pero situada en posiciones diferentes). En cambio, x, y son constantes para cada punto de la curva *MC* (es decir, las coordenadas del vértice), pero no lo son al pasar de una línea de la familia a otra, con vértice *M* o (*M*). Las líneas v y z, son variables tanto para cada punto de la línea, como para las líneas curvas de la familia, exceptuando el caso del punto de intersección *C*, donde son comunes a dos líneas próximas; estas intersecciones dan el punto de la curva tangente. Entonces, diferenciando la ecuación (6) respecto x, y, y tomando f, z, v como constantes:

$$- fdx = -2vdy + 2ydy \qquad (7)$$

Como *AM*(*M*) es una recta, resulta que:

$$dx : dy = x : y = r \qquad (8)$$

donde podemos entender r como la pendiente de la recta.

Despejando y de la expresión (7) y teniendo en cuenta (8), se deduce la expresión:

$$y = v - \frac{1}{2} rf \qquad (9)$$

Finalmente, a partir de las expresiones (6), (8) y (9) se llega a la expresión de la curva buscada:

$$z + \frac{1}{4} r^2 f = rv \qquad (10)$$

Teniendo en cuenta que v es la abscisa y z la ordenada del punto *C*, respectivamente, es evidente que se trata de una recta de pendiente r y, por tanto, paralela a *AM*.

Así pues, esta carta de Leibniz muestra la resolución de un ejemplo concreto para ilustrar el procedimiento general para hallar la envolvente a un conjunto de curvas. Este hecho contrasta con la manera en que Leibniz presentaba el procedimiento general en su artículo en *Acta Eruditorum* de 1692. Tal como él mismo reconocía en dicho artículo, Leibniz era, en general, poco dado a dar explicaciones que pudieran aclarar sus trabajos:

> *"Todas estas cosas se podrían explicar más claramente, y podrían ilustrarse con ejemplos, si mi intención fuera hacer una exposición de mi nuevo método de análisis de los infinitos; pero éste no es el lugar, ni el momento, de hacerlo.*

> *En cuanto a aquéllos que han entendido mis artículos previos, y que quieran meditar más sobre ellos, llegarán sin dificultades a los mismos resultados, y ciertamente de la manera más agradable, ya que tendrán la impresión de estar haciendo los descubrimientos ellos mismos".* (Leibniz, 1692, p. 24 de la traducción de Beaudry, 2000)

5.- Algunas aplicaciones.

Como se ha comentado más arriba, en 1694 Leibniz publicó en *Acta Eruditorum* un artículo sobre cómo aplicar el cálculo diferencial a diversas construcciones posibles de una curva a partir de una propiedad de sus tangentes (Leibniz, 1694). Leibniz comenzaba dicho artículo diciendo que, siendo tantas las aplicaciones del problema de hallar la curva tangente a una infinidad de curvas dadas, había decidido aplicar su cálculo para resolverlo, ganando de esta forma tiempo en la resolución. A continuación, Leibniz destacaba la utilidad de su método para resolver problemas de la geometría superior e incluso para aplicar la geometría a la mecánica y a la física. En cierto modo, en este artículo Leibniz ponía de manifiesto su interés por las posibles aplicaciones del problema de la envolvente de una familia de curvas.

Pero, más allá de la interacción del cálculo con la mecánica racional, encontramos algunas aplicaciones "reales" del cálculo en el siglo XVIII. Como indica Bos (1993: 118-120), una aplicación "real" se puede entender en el sentido de cruzar los límites entre disciplinas; en este caso, de usar el cálculo en los campos de las matemáticas mixtas, como arquitectura, navegación, geografía o guerra. Así, una de las aplicaciones "reales" señalada por Bos (1993: 120) es la balística, donde la teoría de movimiento de proyectiles se combina con los datos experimentales obtenidos en lanzamientos de proyectiles desde un cañón, que en la segunda mitad del XVIII sería integrada dentro de la artillería. Precisamente, uno de los ejemplos más interesantes de aplicación del problema de la envolvente de un conjunto de parábolas está relacionado con la balística. En el ejemplo mostrado en el apartado §147 del *Analyse*, L'Hospital observa que la envolvente de la familia de parábolas es también una parábola. Aun cuando L'Hospital no haga referencia a los antecedentes de esta cuestión, se trata sin duda de la parábola de seguridad, identificada por Torricelli en 1644 en su obra *De Motu Proiectorum* (libro segundo, proposición XXX). Este problema también había sido tratado por Johann y Jakob Bernoulli[19]. Según Johann Bernoulli, durante su estancia en Ginebra Nicolas Fatio de Duillier (1664-1753) le había planteado el problema de hallar la curva tangente a todas las parábolas descritas por el lanzamiento de un proyectil (V: Johann Bernoulli a Leibniz, 2 septiembre 1694, Gerhardt, 1855, III), problema que Bernoulli resolvió, concluyendo que la curva buscada era también una parábola (Spiess, 1955: 107, nota 3). Es más, según Spiess (1955: 111, nota 11), parece que ni Johann ni Jakob Bernoulli conocían el resultado de Torricelli.

Volviendo al ejemplo de L'Hospital, éste acaba la discusión indicando que las parábolas *AMC* marcan el camino descrito en el aire por las bombas lanzadas por un mortero situado en *A*, para todas las elevaciones posibles con la misma fuerza (Figura 4). La línea que divide por la mitad el ángulo *BAC* marcará la posición del mortero, para que la bomba lanzada caiga sobre el plano *AC*, en un punto *C* lo más alejado del mortero que en cualquier otra elevación[20].

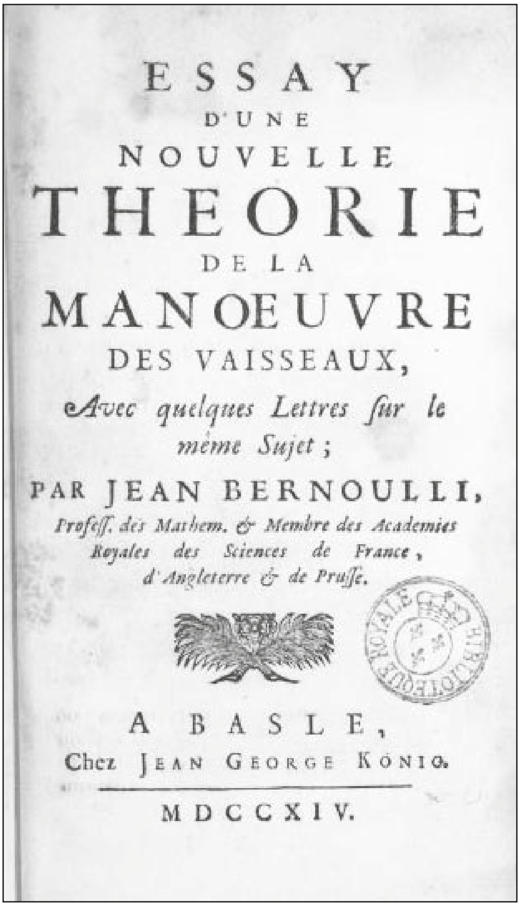
Encontramos otra aplicación "real" del problema de la envolvente de una familia de curvas en *Essai d'une nouvelle théorie de la manoeuvre des vaisseaux* (1714) de Johann Bernoulli (Figura 6)[21].

---

19 Véase, por ejemplo, ENGELSMAN (1984: 27-29) y SPIESS (1955: 107 y 111).

20 En su obra *La Nova Scientia* (1537) Niccoló Fontana, de sobrenombre Tartaglia (1499 o 1500-1557) ya había establecido que el alcance máximo se consigue cuando el ángulo de elevación es 45º. Este aspecto también aparece en los manuscritos de Thomas Harriot (1560-1621) sobre el movimiento de proyectiles, tal como muestra SCHEMMEL (2008). En relación a *La Nova Scientia* de Fontana, VALLERIANI (2013) se centra en su impacto en la fundación de la balística moderna. Por otro lado, MASSA-ESTEVE (2014) presenta una interesante aplicación didáctica del estudio de las trayectorias de proyectiles, basada en *La Nova Scientia*.

21 En MONTUCLA (1802: 412-418) se comenta ampliamente esta obra.


ESSAY
D'UNE
NOUVELLE
THEORIE
DE LA
MANOEUVRE
DES VAISSEAUX,
Avec quelques Lettres ſur le même Sujet ;
PAR JEAN BERNOULLI,
Profeſſ. des Mathem. & Membre des Academies Royales des Sciences de France, d'Angleterre & de Pruſſe.

A BASLE,
Chez Jean George König.
MDCCXIV.

Figura 6. Primera página de *Essai d'une nouvelle théorie de la manoeuvre des vaisseaux* (BERNOULLI, 1714).

Esta obra, dedicada a la teoría de barcos, es, según Nowacki (2008), uno de los primeros intentos de aplicar la teoría del impacto de Newton para determinar las fuerzas actuando sobre un barco[22]. Bernoulli no sólo enfoca la cuestión como una aplicación del nuevo cálculo, sino que también introduce de manera novedosa la representación de fuerzas mediante el análisis

22 Leonhard Euler (1707-1783), discípulo de Johann Bernoulli, es uno de los fundadores de la moderna teoría de barcos. Precisamente fue Bernoulli quien le animó a presentar su primer trabajo en este campo en el concurso de la Académie des Sciences de Paris (1726), sobre la determinación de la configuración óptima, número y altura de los mástiles de un barco. NOWACKI (2008) analiza las contribuciones de Euler a la teoría de barcos.

vectorial[23]. Sin embargo, la obra de Bernoulli, como los primeros tratados sobre teoría de barcos con enfoque matemático, presentaba discrepancias entre los resultados teóricos y las observaciones empíricas[24]. Así, por ejemplo, en su capítulo sobre maniobra de barcos, Montucla afirma que el tratado de Bernoulli "étoit plus propre à satisfaire les géomètres qu'à éclairer les navigateurs" (Montucla, 1802: 418). Si bien en términos de teoría de barcos la obra de Bernoulli se puede considerar como un *best seller*, Ferreiro (2007: 95- 96) cuestiona el verdadero impacto que los primeros tratados tuvieron en la formación de pilotos y navegantes, en el sentido de que muy pocos desarrollos teóricos sobre arquitectura naval se llevaron realmente a la práctica.

Pero justamente por utilizar el cálculo para tratar una cuestión ligada a la navegación, el problema que se muestra a continuación proporciona otro ejemplo de "aplicación real" del cálculo en el XVIII, en el sentido apuntado por Bos (1993: 120-121). En el capítulo IV: *De la situation la plus avantageuse de la voile & de la quille pour gagner au vent, ou our le fuïr, ou pour faire quelque route proposée*, Johann Bernoulli analiza cuál ha de ser el ángulo entre la vela y la línea del viento, en la situación más ventajosa para ganar al viento. Aunque un análisis detallado del contenido de este capítulo queda fuera del alcance del presente trabajo, vale la pena resumir su planteamiento, para ver otra "aplicación real" del problema de la envolvente de una familia de curvas, en este caso, a la navegación.

Bernoulli empieza el capítulo IV planteando el problema de cómo determinar la posición de la quilla, dada la posición de la vela *DC*, es decir, para un ángulo dado *ABC* entre la vela *BC* y la línea del viento *AB* (Figura 7. a). Se traza la curva de velocidades *XKI* (construida en el artículo VI del capítulo III), cuyo diámetro es *BI*, perpendicular a la línea del viento (*BI* es la velocidad cuando el barco sigue ruta perpendicular a la vela). Se traza la tangente *Ka* a la curva de velocidades, perpendicular a la línea de viento *AB*. La línea *BL*, trazada desde el punto *K*, será la ruta que deberá seguir el barco, pues de esta manera la cantidad *Ba* (medida de lo que se gana al viento al recorrer la distancia *BK*) resulta ser máxima. A partir de *BL* se puede determinar la posición de la quilla más ventajosa, según se ha explicado en el artículo X del capítulo III.

23 Para las principales contribuciones de la obra de Johann Bernoulli a la teoría de barcos, véase FERREIRO (2007: 92-96).

24 Véase NOWACKI (2008) y BOS (1993).

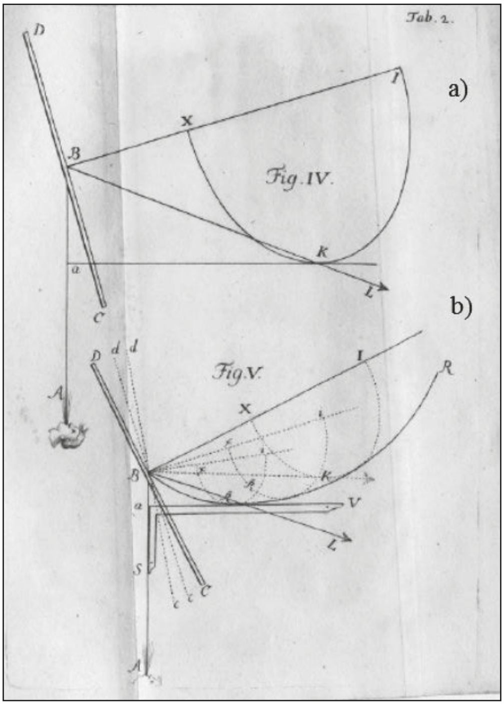


Figura 7. Reproducción de a) Figura IV y b) Figura V de BERNOULLI (1714).

A continuación, Bernoulli determina qué ángulo proporciona la posición más ventajosa de la vela, considerando ahora el ángulo *ABC* variable (Figura 7. b). En este caso toma en cuenta diversas posiciones de la vela *DC*, *dc*, etc. y, como en el artículo anterior, desde el punto *B* traza las correspondientes curvas de velocidades *XKI*, *xki*, etc. De manera que *BK*, donde *K* punto de intersección entre dos curvas *XKI* y *xki*, indicará una ruta común, que el barco seguirá con misma velocidad, para dos posiciones de vela diferentes *DC* y *dc*.

En el artículo III, Bernoulli hace referencia a la proposición presentada por L'Hospital en la sección VIII del *Analyse des infiniment petits*, sobre cómo hallar la curva tangente a una infinidad de curvas dadas de posición, a partir de los puntos de intersección:

> *"Or il est enseigné dans l'Analyse des infiniment petits, comment une infinité de lignes, données de position, forment par leurs intersections immediates une nouvelle ligne courbe, qui touche toutes les autres dans les mêmes points, où deux de ces lignes données infiniment proches se coupent: c'est ainsi par*

exemple que les caustiques sont formées par les concours ou intersections immédiates des rayons réfléchis ou rompus; c'est ainsi aussi que toutes les paraboles, que décrivent les bombes jettées avec la même force de mortier, dans toutes les differentes élevations, font par leurs intersections immediates, une autre parabole, égale à celle que fait le jet horizontal, & dont elle est une espèce d'asymptote". (Bernoulli, 1714: 28)

Esta proposición la aplica Bernoulli al problema de la posición de la vela del barco en el artículo siguiente. A partir de las curvas de velocidades *XKI*, *xki*, etc. se genera una curva *BkKR*, que será tangente a cada una de las curvas, en las intersecciones inmediatas *k*, *K*. Por tanto, la curva *BkKR* será la envolvente de la familia de las curvas de las velocidades generadas para las distintas posiciones de la vela del barco. Una vez descrita la curva *BkKR*, para determinar la posición más ventajosa de la vela y de la quilla para ganar al viento hay que situar el lado menor de una escuadra sobre la línea de viento *AB*, que se desliza hasta que el lado mayor toque (es decir, sea tangente a) la curva *BkKR*. Desde el punto de tangencia *k* se traza la recta *Bk*, que indica la velocidad y la ruta que deberá seguir el barco. La curva de velocidades *xki* que pasa por el punto *k* servirá para determinar la posición de la vela y, según se ha visto en el artículo X del capítulo III, la posición de la quilla.

Vemos, pues, que el estudio del problema de la envolvente de una familia de curvas proporciona ejemplos explícitos de "aplicación real" del cálculo leibniziano a disciplinas como la balística y la navegación, más allá de los límites de la mecánica racional.

6.- Algunas reflexiones finales.

El estudio del problema de la envolvente de una familia de curvas permite visualizar las diversas prácticas de comunicación involucradas en el desarrollo matemático de este problema concreto, tanto en el ámbito público como en el privado. Para empezar, resulta evidente que los artículos sobre el nuevo cálculo publicados por Leibniz en *Acta Eruditorum* influyeron de forma decisiva en L'Hospital, en su intento de comunicar el cálculo leibniziano y, en particular, en el caso de la envolvente de una familia de curvas en su versión final publicada en el *Analyse des infiniment petits*, un elemento clave en la circulación y difusión del cálculo diferencial. Hay que destacar también el papel jugado por los intercambios epistolares de L'Hospital con Johann Bernoulli y Leibniz, facilitados por Malebranche, sin duda una figura clave en este contexto.

En general, la elaboración y la publicación del *Analyse des infiniment petits* ilustran el progreso del conocimiento privado (las lecciones de Johann Bernoulli a L'Hospital, la correspondencia de L'Hospital) al conocimiento público (publicación del *Analyse*). Pero el estudio del problema de la envolvente de una familia de curvas permite ir más allá al plasmar la interacción entre los dos ámbitos, público y privado. Así, el problema de la envolvente muestra cómo los artículos de Leibniz publicados en *Acta Eruditorum* (ámbito público) son tema de discusión en la correspondencia de L'Hospital con Leibniz y Bernoulli (ámbito privado), que a su vez genera nuevo conocimiento que será recogido en el *Analyse* de L'Hospital, pasando así de nuevo al ámbito público.

7.- Bibliografía.

- BEAUDRY, Pierre (tr.) (2000) *The discoveries of principle of the calculus in (Acta Eruditorum). G. W. Leibniz*, Leesburg. [http://amatterofmind.org/Pierres_PDFs/TRANSLATIONS/4._GOTTFRIED_LEIBNIZ_SELECTIONS_FROM_ACTA_ERUDITORUM.pdf]. Consulta: 4 de febrero de 2018.
- BERNOULLI, Johann (1714) *Essai d'une nouvelle théorie de la manoeuvre des vaisseaux*, Basilea, Chez Jean George König.
- BERNOULLI, Johann (1742) "Lectiones mathematicae de calculo integralium". En: *Johann Bernoulli. Opera Omnia*, vol. III, Lausanne – Genève.
- BERNOULLI, Johann (1922) *Lectiones de calculo differentialium (1691-92)*, Basilea, P. Schafheitlin ed., Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel 34.
- BLANCO, Mónica (2001) "Análisis de la discusión L'Hôpital - Bernoulli", *Cronos*, 4 (1-2), 81-113.
- BLANCO, Mónica (2008) "On how Johann Bernoulli's lessons on differential calculus were communicated in eighteenth-century France and Italy". En: SIMON, J.; HERRAN, N.; LANUZA-NAVARRO, T.; RUIZ-CASTELL, P.; GUILLEM-LLOBAT, X. (eds.) *Beyond Borders: Fresh Perspectives in History of Science*, Cambridge, Cambridge Scholars Press, 113-140.

- BLANCO, Mónica (2016) "El Marqués de L'Hospital y la rectificación de la curva logarítmica", *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 82, 43-50.
- BOS, Henk J. M. (1993) "Calculus in the Eighteenth Century: the Rôle of Applications". En: BOS, H. J. M. *Lectures in the History of Mathematics*, American Mathematical Society – London Mathematical Society, 113-127.
- BRADLEY, Robert E., PETRILLI, Salvatore J., SANDIFER, Charles E. (2015) *L'Hôpital's Analyse des infiniments petits: an annotated translation with source material by Johann Bernoulli*, Cham, Birkhäuser.
- DE LORENZO, Javier (2005) "Leibniz – L'Hôpital y el cálculo diferencial", *Estudios Filosóficos*, 54 (155), 59-109.
- ENGELSMAN, Steven B. (1984) *Families of Curves and the Origins of Partial Differentiation*, Amsterdam, North Holland.
- FAUVEL, John; GRAY, Jeremy (1987) *The History of Mathematics. A reader*, The Open University.
- FERREIRO, Larrie D. (2007) *Ships and Science. The Birth of Naval Architecture in the Scientific Revolution, 1600-1800*, Cambridge (Massachusetts) – Londres, The MIT Press.
- GERHARDT, Carl I. (ed.) (1849-1850), "Briefwechsel zwischen Leibniz und dem Marquis de L'Hospital". En: GERHARDT, C. I. (ed.) *Leibnizens mathematische Schriften*, vol. II, Berlin-Halle, Asher & Schmidt.
- LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm (1684) "Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus", *Acta Eruditorum,* Octubre 1684, 467-473.
- LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm (1686) "De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum", *Acta Eruditorum*, Julio 1686, 292-300.
- LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm (1692) "De Linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis inter se concurrentibus formata easque omnes tangente, ac de novo in ea re analysis infinitorum usu", *Acta Eruditorum*, Abril 1692, 168-171.
- LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm (1694) "Nova calculi differentialis applicatio et usus ad multiplicem linearum constructionem ex data tangentium conditionem", *Acta Eruditorum*, Julio 1694, 311-316.
- LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm (2003), *Sämtliche Schriften und Briefe* (Reihe III): *Mathematischer, naturwissenschaftlicher und technischer Briefwechsel*

(vol 5), 1691-93, Berlin, Akademie Verlag.
- L'HOSPITAL, G. F. A. de (1696) *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, París, Imprimerie Royale.
- MARTÍN-SANTOS, Teresa (tr.); DE LORENZO, Javier (ed.) (1987) *Gottfried Wilhelm Leibniz. Análisis infinitesimal*, Madrid, Tecnos.
- MASSA-ESTEVE, M. Rosa (2014) "Historical activities in the mathematics classroom: Tartaglia's *Nova Scientia* (1537)", *Teaching Innovations*, 27 (3), 114-126.
- MONTUCLA, Jean-Étienne (1802) *Histoire des Mathématiques*, vol. IV (5a parte, libro VIII), Paris, Chez Henri Agasse.
- NADLER, Steven (ed.) (2000) *The Cambridge companion to Malebranche*, Cambridge, Cambridge University Press.
- NOWACKI, Horst (2008) "Leonhard Euler and the theory of ships", *Journal of Ship Research*, 52 (4), 274-290.
- PLA, Josep; VIADER, Pelegrí; PARADÍS, Jaume (2008) *Pierre de Fermat. Obra Matemàtica Vària*, Barcelona, Institut d'Estudis Catalans.
- ROBINET, André (1960) "Le groupe malebranchiste introducteur du Calcul infinitésimal en France", *Revue d'Histoire des Sciences*, XIII, 287-308.
- ROBINET, André (1970) *Malebranche de l'Académie des sciences: l'œuvre scientifique, 1674-1715*. París, J. Vrin.
- SCHEMMEL, Matthias (2008) *The English Galileo: Thomas Harriot's Work on Motion as an Example of Preclassical Mechanics*, Springer.
- SPIESS, Otto (ed.) (1955) *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, vol. I, Basilea, Birkhäuser.
- TORRICELLI, Evangelista (1644) *De Motu Proiectorum (Liber Secundus)*, Florencia.
- VALLERIANI, Matteo (2013) *Metallurgy, ballistics and epistemic instruments: the Nova scientia of Nicolò Tartaglia*, Berlín, Edition Open Access. https://www.mpiwg-berlin.mpg.de/news/features/features-feature29
- VARIGNON, Pierre (1725) *Éclaircissemens sur l'Analyse des infiniment petits*, París, Chez Rollin.